

ПОДМЕНА ВОЛНОВОГО ВЕКТОРА ЧАСТИЦЫ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ – ВРЕМЕНИ.

А.М. Заславский

Данная работа продолжает начатое в [1] обсуждение и анализ не исследованного ранее явления подмены волновой функции, как следствия дискретности времени. Рассматривается подмена волнового вектора. Это явление, как и подмена частоты, может проявляться в аномальной динамике частицы, приводящей к парадоксам такого рода, когда уравнения де Бройля, лежащие в основании квантовой механики и принцип наименьшего действия не могут быть одновременно верными. Анализируется возможность и условия экспериментального обнаружения алиасинга волновой функции.

1. Пространство состояний потока событий

В [1] на основании принципа относительности для потоков событий получено соотношение между плотностью потока наблюдаемых мгновенных состояний движущейся частицы и скоростью её движения в инерциальной системе отсчёта

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t_0} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (1)$$

Плотность пуассоновского потока событий представляет собой величину обратную

среднему промежутку времени $\Delta \bar{t} = \frac{1}{\sigma} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ между смежными состояниями

движущейся частицы, измеренному в неподвижной системе отсчёта, связанной с наблюдателем.

Состояния частицы, движущейся в направлении оси X со скоростью V_x , разделённые средним промежутком времени $\Delta \bar{t}$, отстоят в пространстве на расстоянии, которое в среднем равно $\Delta \bar{x} = V_x \Delta \bar{t}$.

Величина $\sigma_x = \frac{1}{\Delta \bar{x}} = \frac{\sigma}{V_x}$, представляющая собой среднее количество мгновенных

состояний движущейся частицы, приходящихся на единицу длины в пространстве наблюдателя в направлении оси X , является линейной плотностью её потока событий.

Разделив обе части (1) на V_x , получим линейную плотность потока событий частицы в виде

$$\sigma_x = \frac{1}{\Delta t_0} \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V_x} = \frac{1}{\Delta l_{0x}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (2)$$

где $\Delta l_{0x} = V_x \Delta t_0$

2. Подмена волнового вектора

В квантовой механике состояние свободно движущейся частицы описывается волновой функцией

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ce^{j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = Ce^{j(\omega t)} e^{-j(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ - частота, \mathbf{r} - радиус-вектор произвольной точки пространства, t - время, \mathbf{k} - волновой вектор. Последний связан с длиной волны соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}. \text{ Частица, как материальный объект, характеризуется энергией } E \text{ и импульсом}$$

\mathbf{p} . Частота и волновой вектор связаны с энергией и импульсом частицы уравнениями де Бройля $E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Волновая функция (3) описывает состояния частицы в потоке бесконечной плотности ($\Delta\bar{t} \rightarrow 0$). В потоке ограниченной плотности ($\Delta\bar{t} > 0$) эту функцию следует рассматривать как результат восстановления дискретной выборки на множестве значений, соответствующих элементарным событиям, происходящим в моменты времени t_i в точках пространства с координатами x_i, y_i, z_i

$$\psi(x_i, y_i, z_i, t_i) = Ce^{j(\omega t_i)} e^{-j(k_x x_i + k_y y_i + k_z z_i)} = Ce^{j(\omega t_i)} e^{-j(k_x x_i)} e^{-j(k_y y_i)} e^{-j(k_z z_i)}, \quad (4)$$

Формально в отношении пространства компоненты волнового вектора играют ту же роль, что и частота в отношении времени.

Пусть компонента волнового вектора k_x , одноимённая компонента скорости частицы V_x и модуль скорости \mathbf{V} таковы, что выполняется условие Котельникова - Шеннона

$$\frac{k_x}{2\pi} \leq F_x = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}}}{2\Delta t_0 V_x}. \quad (5)$$

Если это условие выполняется также и для остальных компонент векторов \mathbf{k} и \mathbf{V} то волновая функция (3), согласно известной *теореме о выборке* однозначно соответствует потоку дискретных состояний частицы (4), т.е. может быть восстановлена по последовательности $\psi(x_i, y_i, z_i, t_i)$ единственным образом.

При нарушении неравенства (5) происходит подмена волнового вектора аналогично тому, как это было показано в [1] для частоты. Таким образом, с учётом (2) условие подмены волнового вектора частицы в инерциальной системе отсчёта имеет вид

$$\frac{k_x}{\pi} > \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\Delta t_0 V_x} . \quad (6)$$

Очевидно, что соответствующие выкладки, приведенные в [1], можно использовать здесь, подставляя вместо частоты ω волновой вектор k , вместо времени t координату x , а вместо кванта времени Δt_0 , квант пространства $\Delta l_{0x} = V_x \Delta t_0$.

Используя сквозную нумерацию $z = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим для чётных $z'' = 2z$ складок величину подменного волнового вектора

$$k_x'' = k_x - \frac{\pi}{\Delta t_0} 2z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V_x}, \quad (7)$$

Величина подменного волнового вектора для нечётных $z' = 2z \pm 1$ складок равна

$$k_x' = 2\pi F_x - k_x + \frac{\pi}{\Delta t_0} (2z \pm 1) \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V_x}, \quad (8)$$

Найдём скорости движения частицы в точках сопряжения складок. Обозначим c_{Fx}'' критическую компоненту скорости в точке перехода чётной складки в нечётную, а c_{Fx}' - критическую компоненту скорости в точке перехода нечётной складки в чётную.

Условием сопряжения при переходе от чётной $z'' = 0, 2, 4, \dots$ к нечётной $z' = 1, 3, 5, \dots$

складке является равенство $k_x''(2z, c_{Fx}'') = k_x'(2z + 1, c_{Fx}')$. Условием сопряжения при

переходе от нечётной $z = 1, 3, 5, \dots$ к чётной $z'' = 0, 2, 4, \dots$ складке является равенство

$$k_x'(2z - 1, c_{Fx}') = k_x''(2z, c_{Fx}'') .$$

Учитывая, что волновой вектор k_x , соответствующий импульсу p_x , равен

$$k_x = \frac{mV_x}{h\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \text{ запишем}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{mc \frac{c_{Fx}''}{c}}{h\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\pi}{c\Delta t_0} 2z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{c_{Fx}''}{c}} = 2\pi F_x - \frac{mc \frac{c_{Fx}''}{c}}{h\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{\pi}{c\Delta t_0} (2z + 1) \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{c_{Fx}''}{c}}, \\ z = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \\ \frac{mc \frac{c_{Fx}'}{c}}{h\sqrt{1 - \left(\frac{c_{Fx}'}{c}\right)^2}} - \frac{\pi}{c\Delta t_0} 2z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{c_{Fx}'}{c}} = 2\pi F_x - \frac{mc \frac{c_{Fx}'}{c}}{h\sqrt{1 - \left(\frac{c_{Fx}'}{c}\right)^2}} + \frac{\pi}{c\Delta t_0} (2z - 1) \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{c_{Fx}'}{c}}, \\ z = 1, 2, 3, 4, \dots \end{array} \right. \quad (9)$$

Принимая во внимание (4) и (5), имеем $2\pi F_X = \frac{\pi}{c\Delta t_0} \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{c_{Fx}}{c}}$. После подстановки

значения $2\pi F_X$ уравнения приводятся к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} 2mc \left(\frac{c''_{Fx}}{c} \right)^2 - \frac{\pi h}{c\Delta t_0} (4z+2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0, \\ z = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 2mc \left(\frac{c'_{Fx}}{c} \right)^2 - \frac{\pi h}{c\Delta t_0} (4z) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0, \\ z = 1, 2, 3, 4, \dots \end{array} \right. \quad (10)$$

Выполнив подстановки $cm_{pl} = \frac{h}{ct_{pl}}$, $\Delta t_0 = \chi \pi t_{pl}$ и соответствующие преобразования, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{c''_{Fx}}{c} \right)^2 = (2z+1) \frac{m_{pl}}{m} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad z = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ \left(\frac{c'_{Fx}}{c} \right)^2 = 2z \frac{m_{pl}}{m} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad z = 1, 2, 3, 4, \dots \end{array} \right. \quad (11)$$

Здесь в первом уравнении $V^2 = (c''_{Fx})^2 + V_y^2 + V_z^2$, а во втором $V^2 = (c'_{Fx})^2 + V_y^2 + V_z^2$.

Обозначим $V_{yz}^2 = V_y^2 + V_z^2$ квадрат модуля проекции скорости частицы на плоскость, ортогональную подменной компоненте волнового вектора (в данном случае k_x).

Следовательно, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c''_{Fx}}{c} = \sqrt{\frac{2z+1}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1}} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad z = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\frac{c'_{Fx}}{c} = \sqrt{\frac{2z}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right)} \quad z = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Найдём волновой вектор в точках сопряжения складок. Волновой вектор в точке сопряжения чётной складки с нечётной будем искать подстановкой в уравнение чётной складки значения критической скорости c''_F в точке перехода чётной складки в нечётную $k''_x(c'')$. Волновой вектор в точке сопряжения нечётной складки с чётной будем искать подстановкой в уравнение чётной складки значения критической скорости c'_F в точке перехода нечётной складки в чётную, согласно условию сопряжения складок $k'_x(2z-1, c'_F) = k''_x(2z, c'_F)$.

Подставляя в (7) вместо V_x значение $\frac{c''_F}{c}$, получим

$$k''_x = \frac{mc \sqrt{\frac{2z+1}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right)}}{h \sqrt{1 - \frac{2z+1}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right) - \frac{V_{yz}^2}{c^2}}} - \frac{\pi}{c\Delta t_0} 2z \sqrt{\frac{1 - \frac{2z+1}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right) - \frac{V_{yz}^2}{c^2}}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{mc \frac{1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1}}{h \frac{\left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right) \sqrt{\chi \frac{m}{m_{pl}} (2z+1)}}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1}} = \frac{c}{h} \sqrt{\frac{mm_{pl}}{\chi(2z+1)}} \quad (13)$$

Подставляя в (7) вместо V_x значение $\frac{c'_F}{c}$, получим

$$k'_x = 0, \quad z = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (14)$$

Этот результат очевиден, так как замена $\frac{c''_F}{c}$ на $\frac{c'_F}{c}$ в данном случае означает замену в (13) числа $(2z+1)$ на $2z$. Если искать волновой вектор в точке сопряжения нечётной

складки с чётной подстановкой в (8) значения $\frac{c'_F}{c}$, надо номер нечётной складки брать в виде $(2z - 1)$. При этом, опять же, получим (14).

Зависимость волнового вектора от скорости частицы в условиях алиасинга волновой функции показана на рисунке 1

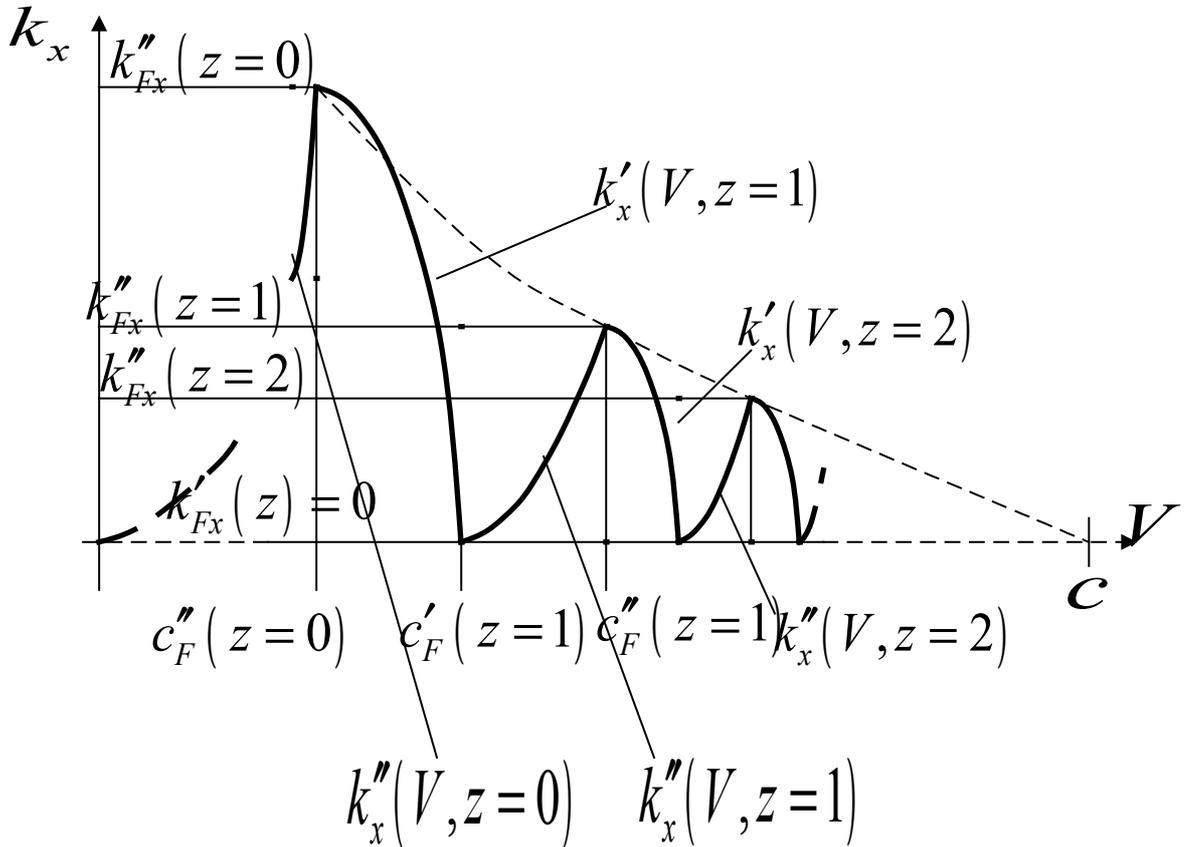


Рис.1. Алиасинг волнового вектора частицы

3. Динамика частицы при подмене волнового вектора

Рассмотрим некоторые особенности динамики частицы в связи с алиасингом. Согласно уравнениям де Бройля волновой вектор эквивалентен импульсу частицы, а частота волновой функции – её энергии. При скоростях движения, когда дискретностью времени и пространства можно пренебречь эта эквивалентность не вызывает сомнений в той же мере, что и базирующаяся на ней квантовая механика. Однако при возникновении алиасинга волновой функции, когда дискретностью времени и пространства уже нельзя пренебречь, справедливость уравнений де Бройля нуждается в дополнительном исследовании.

Выберем систему координат таким образом, чтобы направление движения частицы совпадало с осью X . Это означает, что $\mathbf{V}_{yz} = 0$. Предположим, что энергия и импульс согласно уравнениям де Бройля строго эквивалентны частоте и волновому вектору во всех случаях, включая алиасинг волновой функции.

Сравним скорости движения частицы $c_{F\omega}(z)$ - при подмене частоты и $c_{Fk}(z)$ - при подмене волнового вектора в точках сопряжения складок

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c''_{F\omega}(z)}{c} = \sqrt{1 - \frac{\chi m}{(2z+1)m_{pl}}}, \\ \frac{c''_{Fk}}{c} = \sqrt{\frac{2z+1}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z+1}}, \quad z=0,1,2,3,\dots \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c'_{F\omega}}{c} = \sqrt{1 - \frac{\chi}{2z} \frac{m}{m_{pl}}}, \\ \frac{c'_{Fk}}{c} = \sqrt{\frac{2z}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z}}, \quad z=1,2,3,4,\dots \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c'_{F\omega}}{c} = \sqrt{1 - \frac{\chi}{2z} \frac{m}{m_{pl}}}, \\ \frac{c'_{Fk}}{c} = \sqrt{\frac{2z}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z}}, \quad z=1,2,3,4,\dots \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c'_{F\omega}}{c} = \sqrt{1 - \frac{\chi}{2z} \frac{m}{m_{pl}}}, \\ \frac{c'_{Fk}}{c} = \sqrt{\frac{2z}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + 2z}}, \quad z=1,2,3,4,\dots \end{array} \right. \quad (18)$$

Сравнивая подкоренные выражения в (15,16) и (17,18), получим $\forall z (c''_{F\omega}(z) < c''_{Fk}(z))$,

$\forall z (c'_{F\omega}(z) < c'_{Fk}(z))$. На рис.2 показан совмещённый график подмены частоты и волнового вектора при одномерном движении.

Если эквивалентность энергии частоте, а импульса волновому вектору сохраняется при алиасинге, то в пространстве скоростей частицы можно выделить три характерные динамические области:

N – область нормального движения, которая характеризуется увеличением импульса и энергии при увеличении скорости $\frac{\partial p}{\partial V} > 0, \frac{\partial E}{\partial V} > 0$;

A – область аномального движения, в которой производные по скорости энергии частицы и импульса имеют разные знаки $\frac{\partial p}{\partial V} \times \frac{\partial E}{\partial V} < 0$;

M – область зеркального движения, в которой и энергия и импульс частицы уменьшаются при увеличении её скорости $\frac{\partial p}{\partial V} < 0, \frac{\partial E}{\partial V} < 0$.

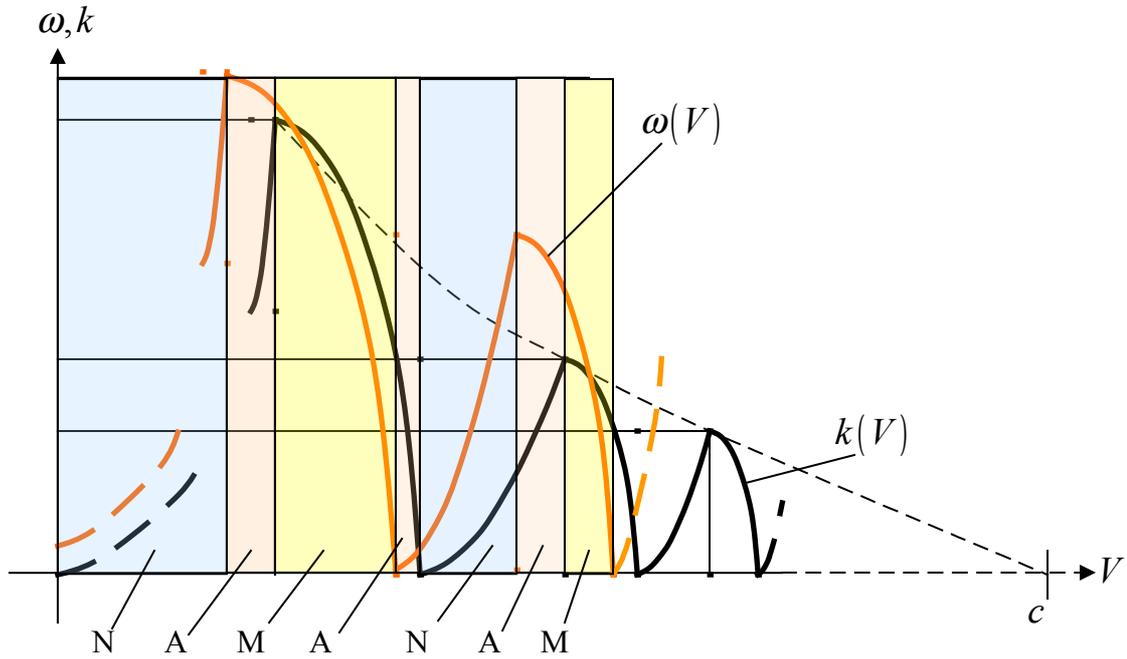


Рис.2. Структура пространства скоростей ультррелятивистской частицы

При этом поведение частицы в областях аномального и зеркального движения не вписывается в известные законы динамики. Так, например, в А-области кинетическая энергия частицы уменьшается при увеличении её импульса и наоборот, увеличивается при уменьшении. В М-области зеркального движения частица ведёт себя так, как будто имеет отрицательную инертную массу, хотя в действительности её масса остаётся положительной. Согласно известным классическим и релятивистским соотношениям между импульсом и энергией частицы подобное поведение невозможно. Согласно полученным выше соотношениям, подмену энергии и импульса в рассматриваемом одномерном случае можно представить в виде

$$E'' = E - 2zF(V), \quad p'' = p - 2z \frac{F(V)}{V}, \quad (19)$$

$$E' = -E + (2z + 1)F(V), \quad p' = -p + (2z + 1) \frac{F(V)}{V}, \quad (20)$$

где $F(V) = \frac{c^2 m_{pl}}{\chi} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, $E' = \hbar \omega'$, $E'' = \hbar \omega''$, $p' = \hbar k'$, $p'' = \hbar k''$.

Функция Лагранжа связана с импульсом и энергией известными соотношениями

$$L = \mathbf{pV} - E, \quad (21)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \quad (22)$$

Подставляя в (21) подменные значения энергии и импульса на соответствующих складках, не трудно убедиться в том, что (22) и (21) при алиасинге не совместны, т.е., $\mathbf{p}^* \neq \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{V}}$, если $L^* = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{V} - E^*$, где \mathbf{p}^* и L^* подменные значения импульса и функции Лагранжа в соответствующих динамических областях. Например, для нечётной складки имеем

$$L' = -pV + (2z+1)F(V) + E - (2z+1)F(V) = -pV + E = -L$$

Но производная $\frac{\partial L'}{\partial V} = -\frac{\partial L}{\partial V}$ даст нам $-P$, а не $p' = -p + (2z+1)\frac{F(V)}{V}$.

Следовательно, если сделанное выше допущение об универсальности уравнений де Бройля получит эмпирическое подтверждение, это будет означать, что лагранжева динамика, базирующаяся на принципе наименьшего действия, не применима к частицам, движущимся со скоростью, при которой происходит подмена их волновых функций. Траектории таких частиц будут существенно отличаться от тех, которые можно было бы ожидать в соответствии с принципом наименьшего действия.

Уравнение Шрёдингера также потребует уточнения, так как использование в нём оператора Гамильтона опирается на тот же принцип наименьшего действия, который в условиях алиасинга не совместим с уравнениями де Бройля.

Оператор силы, согласно теоремам Эренфеста, равен оператору производной по времени от импульса лишь в том случае, когда энергия и импульс удовлетворяют уравнениям (21) и (22). А так как в рассматриваемом случае это невозможно, то не ясно, как изменяется импульс алиасинговой частицы под действием приложенной к ней силы не только в классическом приближении, но и в квантовой интерпретации.

Можно предположить, что причиной здесь является именно дискретность пространства-времени, ограничивающая возможность использования вариационных принципов. Но в таком случае основные динамические понятия: энергия, импульс и сила требуют пересмотра.

4. О возможности и условиях экспериментального обнаружения алиасинга волновой функции

Очевидно, что окончательный ответ на поставленные выше вопросы может дать только эксперимент. Рассмотрим некоторые условия проведения подобного эксперимента. Энергия движущейся в направлении оси X частицы в лабораторной системе отсчёта равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}$$

Отсюда скорость при заданной энергии

$$\frac{V_x}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

При скорости относительного движения $\frac{V_x}{c} \geq \sqrt{\frac{1}{1 + \chi \frac{m}{m_{pl}}} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right)}$ вследствие

подмены волнового вектора можно ожидать кардинального изменения характера движения частицы и (или) спектра излучения при её взаимодействии с электромагнитным полем или другими частицами. Наблюдая эти изменения, можно обнаружить алиасинг и исследовать его свойства. Не вдаваясь в детали подобного эксперимента, найдём, какой должна быть энергия частицы при его проведении. Подставляя в условие алиасинга значение скорости поступательного движения частицы в лабораторной системе отсчёта, выраженной через энергию, получим

$$\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{1 + \chi \frac{m}{m_{pl}}} \left(1 - \frac{V_{yz}^2}{c^2}\right)}$$

Отсюда найдём

$$E \geq mc^2 \sqrt{\frac{1 + \chi \frac{m}{m_{pl}}}{\chi \frac{m}{m_{pl}} + \frac{V_{yz}^2}{c^2}}}$$

Для того чтобы получить величину необходимой энергии требуется оценить величину χ .

В [1] при вычислении этой оценки была допущена ошибка. Поэтому здесь повторим соответствующие вычисления. Наибольшее значение энергии частица имеет в точке сопряжения нулевой и первой складок при подмене частоты

$$E_{\text{sup}} = c^2 \sqrt{\frac{mm_{pl}}{\chi}}$$

Наблюдения космических лучей ультравысоких энергий дают основания предположить, что предельная энергия протона имеет порядок 10^{20} эВ. Подставляя в приведенную формулу $E_{\text{sup}} = 10^{20}$ эВ, массу протона 938 МэВ и планковскую массу $1,22 \times 10^{19}$ ГэВ, получим

$$\chi = \frac{mm_{pl}c^4}{E_{\text{sup}}^2} = \frac{\Delta t_0}{\pi t_{pl}} : 1,144 \times 10^{-3}. \quad (23)$$

Эта фундаментальная по своей физической сущности безразмерная константа, имеет тот же порядок, что и приведённая постоянная тонкой структуры $\frac{\alpha}{2\pi} = 1,161409732 \times 10^{-3}$.

Учитывая близость двух рассматриваемых величин (отличие не превышает 2%), а также, то, что (23) является лишь оценкой порядка величины, можно предположить, что в

действительности $\chi = \frac{\alpha}{2\pi}$, а предельная энергия частицы с массой протона равна

$$0,985 \times 10^{20} \text{ эВ.}$$

При этом три физические константы: квант времени Δt_0 , постоянная тонкой структуры α и планковское время t_{pl} оказываются связанными простым соотношением

$$\Delta t_0 = \alpha \frac{t_{pl}}{2} = 7,297352 \times 10^{-3} \frac{5,39056 \times 10^{-44}}{2} = 19,668407 \times 10^{-47} \text{ с.}$$

Вернёмся теперь к обсуждению вопроса о возможности экспериментального обнаружения алиасинга волновой функции.

Если направление движения частицы совпадает с направлением оси X ($\mathbf{V}_{yz} = 0$), условием возникновения алиасинга является

$$E \geq mc^2 \sqrt{\frac{1 + \chi \frac{m}{m_{pl}}}{\chi \frac{m}{m_{pl}}}} \approx c^2 \sqrt{\frac{mm_{pl}}{\chi}} .$$

Т.е. для частицы с массой протона величина этой энергии должна быть порядка 10^{20} эВ, что нереально достичь в земных условиях не только сегодня, но и в обозримом будущем. Однако, если частица, двигаясь в направлении оси X , одновременно описывает окружность в плоскости, перпендикулярной направлению движения (движется по спирали, навитой вокруг траектории поступательного движения), то требуемая для возникновения алиасинга энергия будет тем меньше, чем больше линейная скорость вращения частицы. При относительно большой скорости вращения частицы

$\frac{\mathbf{V}_{yz}^2}{c^2} \gg \chi \frac{m}{m_{pl}}$ условие возникновения алиасинга можно представить в виде

$$E \geq \frac{mc^3}{|\mathbf{V}_{yz}|} = mc^2 \sqrt{\frac{mc^2}{w}} ,$$

где w - энергия вращения частицы.

Пусть, например, энергия вращения частицы есть энергия теплового вращения двухатомного иона, равная $kT : 0,025$ эВ. Для этого случая получим требуемую энергию поступательного движения вращающейся частицы

$$E \geq 0,938 \times 10^9 \sqrt{\frac{0,938 \times 10^9}{0,025}} \approx 18,2 \times 10^{12} \text{ эВ}$$

На сегодняшний день максимальная энергия протонов, которая планируется быть достигнутой в ЛНС, составляет 7×10^{12} эВ, что примерно в 2,5 раза меньше требуемой. Если же возбуждать, как показано в [2] вращение частиц лазерным излучением слабой мощности порядка 5×10^7 В/см, характерное возмущение двухатомного иона достигает значения $w = 0,27$ эВ. При этом требуемая энергия поступательного движения частицы снижается до величины $E \geq 5,5 \times 10^{12}$ эВ, которая, в принципе, может быть достигнута в экспериментах.

Выводы

1. Рассматривая в связи с явлением алиасинга волновой функции три принципиально важные для физики гипотезы:
 А) о том, что траектории движения частиц удовлетворяют принципу наименьшего действия,
 Б) об эквивалентности энергии частицы частоте, а её импульса волновому вектору,
 В) о дискретности времени,
 мы приходим к выводу о том, что все эти гипотезы не могут быть одновременно верными во всех мыслимых случаях, в силу неустранимых противоречий между ними. Совместимы только любые две из них. Если все мыслимые случаи движения частиц удовлетворяют гипотезам А и Б, то гипотеза В не верна и время следует считать континуальным. Если верны А и В, то Б не распространяется на случай алиасинга, когда указанная в Б) эквивалентность нарушается. Если верны Б и В, то А не может распространяться на все случаи движения и принцип наименьшего действия применим лишь при скоростях, ограниченных пределом Найквиста – Котельникова – Шеннона.
 Для выхода из этого кризиса фундаментальных гипотез необходим эксперимент.
2. В континуальном времени частота и волновой вектор неограниченно возрастают при приближении скорости частицы к скорости света в вакууме. В дискретном времени вследствие явления алиасинга волновой функции, напротив, её частота и волновой вектор ограничены.
3. В ультрарелятивистской области при дискретном времени существуют такие, отличные от нуля, скорости частиц, при которых волновой вектор и частота волновой функции обращаются в нуль.
4. Известный сегодня верхний предел энергии космических частиц, оцениваемый величиной порядка 10^{20} эВ, даёт основания предположить, что отношение удвоенного значения кванта дискретного времени к планковскому времени есть постоянная тонкой структуры.
5. Условия возникновения алиасинга волновой функции таковы, что энергия, которая необходима для воспроизведения этого явления при поступательном движении частиц, превышает возможности современного оборудования. Однако технические

возможности ЛНС могут оказаться достаточными для воспроизведения алиасинга волновых функций частиц, вращающихся по спирали, навитой вокруг оси, вдоль направления их основного поступательного движения.

Литература

1. Заславский А.М. Алиасинг волновой функции частицы в дискретном времени <http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/zaslavsky-aliasing.pdf>
2. Сухарев М. Е., Крайнов В. П. Вращение и ориентация двухатомных молекул и их молекулярных ионов в сильных лазерных полях // ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 2, С.573-582.